

Dans cette séance on va apprendre:

- (i) la définition de matrice et de matrice augmentée associées à un SEL;
- (ii) la définition de coefficient principal d'une ligne d'un SEL;
- (iii) la définition de matrice échelonnée et de matrice échelonnée réduite;
- (iv) la définition d'opération élémentaire sur les lignes d'une matrice et de matrices équivalentes selon les lignes ou ligne-équivalentes;
- (v) la définition de variables libres et liées d'un SEL réduit;
- (vi) la méthode de réduction de Gauss-Jordan;

§1.5 Matrices et algorithme de Gauss - Jordan

Déf 1.16 É.d. un SEL (*)
$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \dots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}$$

• la matrice associée est le tableau à m lignes et à n colonnes donné par

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

• la matrice augmentée associée est le tableau à m lignes et (n+1) colonnes donné par

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} & b_m \end{pmatrix}$$

parfois on écrit une ligne continue ou en trait tiré, ici on va faire une ligne pointillée/tirée

dont la dernière colonne est distinguée.

! La matrice augmentée associée à un SEL a la même information que le SEL, mais de façon plus compacte.

Équivalence SEL et matrices augmentées

Exemple 1.15 (suite) La matrice augmentée associée au SEL de l'Exemple 1.15 est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 4 & 1 \\ 6 & 12 & 6 & 0 \\ -2 & -2 & -7 & 5 \end{array} \right)$$

Déf. 1.12 (pour matrices/matrices augmentées)

Toutes les définitions dans Déf. 1.12 pour SEL ont aussi du sens pour les matrices/matrices augmentées. En particulier, on peut effectuer les (OEL.I)-(OEL.III) aux matrices/matrices augmentées, et deux matrices/matrices augmentées sont lignes-équivalentes si l'on obtient une de l'autre à partir d'une suite finie d'OEL.

Déf. 1.18 Si $A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m,1} & \dots & A_{m,n} \end{pmatrix}$ est une matrice à m lignes et à n colonnes ($\overset{\text{c'est dit aussi}}{\equiv} |A \text{ est de taille } m \times n|$), alors

- le coefficient principal de la i -ème ligne de A est, s'il y en a un, le premier A_{ij} non nul en partant de la gauche (i.e. $A_{i,1} = \dots = A_{i,j-1} = 0$ et $A_{i,j} \neq 0$)

RKC Si la i -ème ligne de A est formée de zéros, il n'y a pas de coefficient principal!

- on dit que A est échelonnée si

(ECH.1) Toute ligne de A en dessous d'une ligne nulle est nulle

(ECH.2) Si L_i et L_j sont deux lignes non nulles de A avec $i < j$, A_{i,p_i} est le coefficient principal de L_i et A_{j,p_j} est le coefficient principal de L_j , alors $p_i < p_j$.

De façon graphique:

$$A = \begin{pmatrix} * & * & \dots & * & \dots & * \\ 0 & 0 & \dots & A_{i,p_i} & \dots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & A_{j,p_j} & \dots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow L_i \\ \leftarrow L_j \end{array}$$

Exemple C

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est échelonnée

coeff. princip. OK

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est échelonnée

lignes nulles OK

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ligne nulle en dessus d'une ligne non nulle !
n'est pas échelonnée

deux coeff. princip. dans la même colonne !

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

n'est pas échelonnée

ligne nulle OK

coefficients princip. dans le mauvais ordre !

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

n'est pas échelonnée

ligne nulle OK

Déf. 1.26 | Une matrice $A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m,1} & \dots & A_{m,n} \end{pmatrix}$ est échelonnée réduite

si elle est échelonnée et
(ECH.3) tous les coefficients principaux valent 1;

(ECH.4) si la colonne C_k de A inclut le coefficient principal d'une ligne L_i de A , alors les autres coefficients dans la colonne C_k sont nuls (i.e. $A_{j,k} = 0$, pour tout $j \neq i$).

On appelle pivot à tout coefficient principal d'une ligne nulle d'une matrice échelonnée réduite.

Exemple C (suite)

Ni A ni B ne sont matrices échelonnées réduites, mais

$$A \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow \frac{1}{4}L_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } C \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2, L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ sont échelonnées réduites}$$

Thm 1.21 + 1.29 Toute matrice A de taille $m \times n$ est ligne-équivalente à une matrice échelonnée réduite. En plus cette matrice échelonnée réduite est unique, i.e. si

$$A \xrightarrow{OEL_1} \dots \xrightarrow{OEL_p} E \quad \text{et} \quad A \xrightarrow{OEL'_1} \dots \xrightarrow{OEL'_p} E'$$

avec OEL_i et OEL'_i des opérations élémentaires sur les lignes, E et E' des matrices échelonnées réduites, alors $E = E'$.

Comme la matrice échelonnée réduite dans le thm. précédent dépend uniquement de A , on l'appelle matrice échelonnée réduite de A ou (matrice échelonnée) réduite de Gauss-Jordan de A .

(Preuve de l'existence) = Méthode de Gauss-Jordan S: $A = 0$ ✓, donc on suppose désormais $A \neq 0$.

Étape 1 | " $\exists OEL_1, \dots, OEL_p$ t.q. $A \xrightarrow{OEL_1} \dots \xrightarrow{OEL_p} F$ avec F matrice échelonnée dont les pivots valent 1."

On procède par récurrence sur la quantité de lignes de $A \neq 0$.

Cas $m=1$ | Soit λ le coeff. principal de A , qui possède une unique ligne non nulle. Alors $\lambda \neq 0$ et $A \xrightarrow{L_1 \leftarrow \frac{1}{\lambda} L_1} F$ avec F échelonnée (réduite).

Cas $m > 1$ (GJ1) En employant (OEL.I), A se transforme en une matrice ligne-équivalente A' telle que toute ligne en dessous d'une ligne nulle est nulle. $\leadsto A' = \begin{pmatrix} * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ } lignes non nulles
} lignes nulles

(GJ2) Comme $A \neq 0$, alors $A' \neq 0$. En employant (OEL.I), A' se transforme en une matrice ligne-équivalente A'' dont toutes les colonnes précédant le coefficient principal (non nul!) de la première ligne sont nulles.

$$\leadsto A'' = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \lambda & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

↑
colonnes nulles

} lignes non nulles

} lignes nulles

(GJ3) On pose A''' à partir de $A'' \xrightarrow{L_n \leftarrow \frac{1}{\lambda} L_1} A'''$, i.e.

$$A''' = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

↑
colonne d

} lignes non nulles

} lignes nulles

est ligne-équiv à A''

(GJ4) On remplace chaque ligne non nulle L_i de A''' par $L_i - \frac{A'''_{i,j}}{\lambda} L_j$, ce qui nous donne une matrice ligne-équiv à A''' de la forme

$$A^{(iv)} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \left. \begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\} \text{ lignes nulles}$$

Si l'on applique l'hypothèse de la récurrence à B , on conclut que $B \xrightarrow{\text{OEL}_1} \dots \xrightarrow{\text{OEL}_q} F'$ avec F' matrice échelonnée dont les pivots valent 1 ∇

Alors

$$A \rightarrow A' \rightarrow A'' \rightarrow A''' \rightarrow A^{(iv)} \xrightarrow{\text{OEL}} \dots \xrightarrow{\text{OEL}} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{100px}}_{\text{suite d'OEL}}$
 $\underbrace{\hspace{100px}}_{\text{suite d'OEL}}$

matrice échelonnée ∇
dont les pivots valent 1

Étape 2 "Si F matrice échelonnée dont les pivots valent 1, alors $F \xrightarrow{\text{OEL}_1} \dots \xrightarrow{\text{OEL}_q} F$ avec F matrice échelonnée réduite"

On procède par récurrence ^{inversée} sur la quantité r de colonnes avec pivots de F qui ont des éléments non nuls autres que les pivots. Si $r=0$ $\checkmark$. Or, si $r>0$, soit C_q la dernière colonne avec un pivot avec un élément non nul autre que le pivot. On suppose (= la plus à droite)

que le pivot de la colonne C_q est dans la ligne L_i . Alors, on remplace chaque ligne L_j de F pour $j < i$ par $L_j - F_{j,q} L_i$. La nouvelle matrice F' est ligne-équivalente à F , échelonnée, les pivots valent 1 et sont précisément situés dans les mêmes lignes et colonnes que ceux de F . En plus la colonne C_q de F' satisfait que tous ses éléments sont nuls sauf le pivot. Si l'on applique l'hypothèse de la récurrence inversée à F' , il existe $F' \xrightarrow{\text{OEL}_1} \dots \xrightarrow{\text{OEL}_q} F$ avec F matrice échelonnée réduite.

Comme

$$F \rightarrow \dots \rightarrow F' \rightarrow \dots \rightarrow F, \text{ alors le résultat est prouvé. } \square$$

$\underbrace{\hspace{100px}}_{\text{suite d'OEL}}$
 $\underbrace{\hspace{100px}}_{\text{suite d'OEL}}$

Exemple 1.25* ^{modifié} Résoudre le SEL

$$(*) \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ 3x_1 + 4x_2 = 4, \\ 4x_1 + 5x_2 - x_3 = 9, \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{la matrice} \\ \text{augmentée} \\ \text{associée} \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & 0 & 4 \\ 4 & 5 & -1 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1 \end{array}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -11 \\ 0 & 1 & 3 & -11 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 16 \\ 0 & 1 & 3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pivots

forme échelonnée réduite

$$\begin{cases} x_1 = 16 + 4x_3 \\ x_2 = -11 - 3x_3 \end{cases}, \forall x_3 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 4x_3 = 16 \\ x_2 + 3x_3 = -11 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 \end{cases}$$

le SEL associé

sont solutions de (*).

superflue!

Les formes échelonnées réduites donnent la solution du SEL directement!

Déf. (p.3) | Étant donné un SEL (*) compatible

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \dots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}$$

si l'on écrit (l'unique) SEL de la forme échelonnée réduite $\mathcal{E}$ de la matrice augmentée A de (*), alors

- les variables des colonnes avec pivots de $\mathcal{E}$ sont appelées variables liées (ou de base);

- les variables des colonnes qui ne contiennent pas des pivots de $\mathcal{E}$ sont appelées variables libres $\leftarrow$ parfois il n'y a pas $\nabla \equiv \begin{cases} \text{SEL} \\ \text{compatible} \\ \text{déterminé} \end{cases}$

SLOGAN | La forme échelonnée réduite permet d'écrire toutes les solutions d'un SEL compatible: chaque variable liée est exprimée en fonction de variables libres

Exemple 1.25 | ^{✓ sans modifier} Résoudre le SEL

7

(*)
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ 3x_1 + 4x_2 = 4, \\ 4x_1 + 5x_2 - x_3 = 7, \end{cases}$$
 la matrice augmentée associée

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & 0 & 4 \\ 4 & 5 & -1 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -11 \\ 0 & 1 & 3 & -13 \end{pmatrix}$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - L_2$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 16 \\ 0 & 1 & 3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Problème !!

Pas de solution = SEL incompatible